ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 15 (1995) 320–332

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Décomposition du fibré des spineurs d'une variété spin Kähler-quaternionienne sous l'action de la 4-forme fondamentale

Oussama Hijazi, Jean-Louis Milhorat

Université de Nantes, Département de Mathématiques, URA 758, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes, France

e-mail: hijazi,milhorat@math.univ-nantes.fr

Received le 16 février 1994

Résumé

On a spin quaternionic-Kähler manifold M^{4m}, we give the spectral decomposition of the spin bundle under the action of the fundamental 4-form Ω. Moreover, we compute the eigenvalues of Ω which, in the compact case, play an essential role in the problem of estimating the eigenvalues of the Dirac operator. The proof is based on the decomposition of the spin representation into irreducible components under the action of the group $Sp(1) \times Sp(m)$. We show that this algebraic result induces a Whitney decomposition of the spin bundle which, when restricted to the fibres, is the spectral decomposition under the action of Ω.

Keywords: Spinors; Quaternions; Kähler;
1991 MSC: 53 A 50, 81 R 25, 53 C 55

0. Introduction

Un résultat de M. Berger [Ber] montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour qu'une variété riemannienne (M, g) de dimension n, non localement symétrique, admette une représentation du groupe d'holonomie restreint Hol_0 irréductible (cf. [Bes]):

(I) $Hol_0 = SO(n)$;
(II) $n = 2m$, $m \geq 2$, $Hol_0 = U(m)$;
(III) $n = 2m$, $m \geq 2$, $Hol_0 = SU(m)$;
(IV) $n = 4m$, $m \geq 2$, $Hol_0 = Sp(1) \cdot Sp(m)$;
(V) $n = 4m$, $m \geq 2$, $Hol_0 = Sp(m)$;

SSDI 0393-0440(94)00021-U

(VI) $n = 16$, $Hol_0 = Spin(9)$;
(VII) $n = 8$, $Hol_0 = Spin(7)$;
(VIII) $n = 7$, $Hol_0 = G_2$.

Dans (IV), on désigne par $Sp(1) \cdot Sp(m)$ le sous-groupe de $SO(4m)$, isomorphe à $Sp(1) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(m)$, qui opère sur $\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{4m}$ par

$$x \longrightarrow A\, x\, \bar{q} \ ,$$

où A est une matrice (m,m) à coefficients dans $\mathbb{H}$, et q un quaternion de norme 1. ($\mathbb{H}^m$ est considéré comme un espace vectoriel à droite sur $\mathbb{H}$.)

Les variétés dont le groupe d'holonomie Hol est contenu dans le groupe $Sp(1) \cdot Sp(m)$, $m \geq 2$, sont dites Kähler-quaternioniennes. Un exemple standard est donné par l'espace projectif quaternionien $\mathbb{H}P^m$, pour lequel $Hol = Sp(1) \cdot Sp(m)$.

Le fibré des repères orthonormés directs $SO(M)$ d'une telle variété M, admet donc une réduction, notée $H(M) \longrightarrow M$, de son groupe structural à $H = Sp(1) \cdot Sp(m)$. Par le choix d'un repère de $H(M)$, *dit* adapté, on peut transporter sur les fibres de TM la structure quaternionienne définie par l'action de $i, j, k \in Sp(1)$ sur $\mathbb{H}^m$.

La condition sur l'holonomie de (M^{4m}, g) entraîne donc l'existence d'un sous-fibré F de $End(TM)$, de rang 3, possédant la propriété suivante: il existe un atlas de trivialisation pour lequel les sections locales associées J_α, $\alpha = 1,2,3$, vérifient

$$J_\alpha \circ J_\beta = -\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{Id} + \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma}\ J_\gamma \ , \tag{0.1}$$

où $\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1$ suivant que (α, β, γ) est une permutation paire ou impaire de $(1,2,3)$, $\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ sinon.

$$g(J_\alpha(X), J_\alpha(Y)) = g(X,Y) \ , \quad \forall X, Y \in TM,\ \alpha = 1,2,3, \tag{0.2}$$

$$\nabla\ J_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \omega_\alpha^\beta\ J_\beta \ , \quad \text{les } \omega_\alpha^\beta \text{ étant des 1-formes locales sur } M, \tag{0.3}$$

où ∇ *désigne* la dérivation covariante associée à la connexion de Levi-Civita sur M.

Un repère adapté est alors un repère local orthonormé de TM de la forme $(e_1, J_1 e_1, J_2 e_1, J_3 e_1, \ldots, e_m, J_1 e_m, J_2 e_m, J_3 e_m)$.

Sur (M^{4m}, g, F), on définit la 4-forme "fondamentale" par

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^{3} \Omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha \ , \tag{0.4}$$

où Ω_α, $\alpha = 1,2,3$, désigne la 2-forme locale

$$\Omega_\alpha(X,Y) = g(J_\alpha X, Y) \ , \quad X, Y \in TM \ . \tag{0.5}$$

Comme le groupe structural du fibré F est $SO(3)$, cette 4-forme est définie globalement. On peut aussi remarquer que Ω est parallèle (ceci résulte de (0.3); pour plus de détails cf. [Bon, Kr]).

Si la variété Kähler-quaternionienne (M^{4m}, g, F) est munie d'une structure spin, cette 4-forme Ω opère, par multiplication de Clifford, sur les fibres du fibré des spineurs ΣM. Nous nous proposons d'établir le résultat suivant:

Théorème. *Soit (M^{4m}, g, F) une variété spin Kähler-quaternionienne. Sous l'action de la 4-forme fondamentale Ω, le fibré des spineurs ΣM se décompose en une somme directe de $(m+1)$ sous-fibrés*

$$\Sigma M = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k M \, ,$$

chaque fibre de $\Sigma_k M$ étant un espace propre de Ω pour la valeur propre

$$\mu_k = 6m - 4k(k+2) \, .$$

La multiplicité de μ_k est égale à

$$\operatorname{rang}(\Sigma_k M) = (k+1)\left(\binom{2m}{m-k} - \binom{2m}{m-k-2}\right) ,$$

avec la convention que $\binom{p}{q} = 0$ si $q < 0$.

L'utilité de ce résultat apparaît dans le problème de minoration du spectre de l'opérateur de Dirac (cf. [H-M]), car cette minoration fait intervenir les valeurs propres de Ω.

Aperçu de la démonstration. Il y a deux cas à considérer suivant la parité de m. Si m est impair, un résultat de S. Salamon (cf. [Sal 1]) montre que l'existence d'une structure spin entraîne l'existence d'une extension $K(M)$ du fibré $H(M)$, au groupe structural $K = Sp(1) \times Sp(m)$. Nous considérons alors la structure spin définie par le fibré $K(M) \times_K Spin(4m)$, où K opère à gauche sur $Spin(4m)$ par l'intermédiaire de l'homomorphisme de groupe $\widetilde{\alpha} : K \to Spin(4m)$, qui relève l'homomorphisme $\alpha : K = Sp(1) \times Sp(m) \to H = Sp(1) \cdot Sp(m)$ (cf. §1). Le fibré des spineurs est alors isomorphe à $K(M) \times_K \Sigma$, où Σ désigne l'espace des spineurs pour la représentation spinorielle complexe $\rho : Spin(4m) \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, et où K opère sur Σ par $\rho \circ \widetilde{\alpha}$. Sous cette action, le K-module Σ se décompose en K-modules de représentations irréductibles $\Sigma = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k$. On a alors la décomposition $\Sigma M = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k M$, où

$$\Sigma_k M = K(M) \times_K \Sigma_k \, .$$

Si m est pair, on ne peut affirmer qu'il existe une extension de $H(M)$ au groupe K comme précédemment. En revanche, l'homomorphisme $\widetilde{\alpha}$ se factorise en un homorphisme $H \to Spin(4m)$ (cf. [Ma-Ro]). La variété est alors munie de la structure spin définie par $H(M) \times_H Spin(4m)$. Par ailleurs, comme les représentations $K \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma_k)$ se factorisent en représentations $H \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma_k)$, on peut considérer les fibrés

$$\Sigma_k M = H(M) \times_H \Sigma_k \, ,$$

et le fibré $\Sigma M = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k M$ est isomorphe au fibré des spineurs.

On vérifie ensuite que Ω commute avec l'action de K sur les fibres de ΣM (quelle que soit la parité de m, ces fibres sont en effet des K-modules irréductibles). Il résulte alors du théorème de Schur que la restriction de Ω à $\Sigma_k M$ est nécessairement un multiple de l'identité μ_k Id. Un calcul explicite donne $\mu_k = 6m - 4k(k+2)$.

1. Décomposition de la représentation spinorielle sous l'action de $Sp(1) \times Sp(m)$

1.1. Le groupe $Sp(1) \cdot Sp(m)$

On considère $\mathbb{H}^{m+1}$, espace vectoriel à droite sur $\mathbb{H}$, muni du produit symplectique usuel. On désigne par $(1, i, j, k)$ la base canonique sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{H}$. On identifie $\mathbb{H}$ à $\mathbb{C} \oplus j\,\mathbb{C}$, de sorte que $\mathbb{H}^{m+1}$ s'identifie à $(\mathbb{C} \oplus j\,\mathbb{C})^{m+1} \simeq \mathbb{C}^{2(m+1)}$, et l'espace $M_n(\mathbb{H})$ des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{H}$ à un sous-espace de $M_{2n}(\mathbb{C})$.

On considère la représentation matricielle du groupe symplectique $Sp(m+1)$

$$G = \left\{ A \in M_{m+1}(\mathbb{H}) \ , \ {}^t\overline{A}A = I \right\} \ ,$$

et on identifie le groupe $Sp(1) \times Sp(m)$ à

$$K = \left\{ A \in M_{m+1}(\mathbb{H}) \ , \ A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \ , \ q \in S^3 \ , \ B \in M_m(\mathbb{H}) \ , \ {}^t\overline{B}B = I \right\} .$$

Leurs algèbres de Lie respectives sont

$$\mathcal{G} = \left\{ A \in M_{m+1}(\mathbb{H}) \ , \ {}^t\overline{A} + A = 0 \right\} \ ,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ A \in M_{m+1}(\mathbb{H}) \ , \ A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \ , \right.$$
$$\left. q \in \mathbb{H} \ , \ B \in M_m(\mathbb{H}) \ , \ \overline{q} + q = 0 \ , \ {}^t\overline{B} + B = 0 \right\} .$$

Soit σ l'automorphisme involutif de G défini par

$$\sigma(A) = SAS^{-1} \ , \ A \in G \ , \ S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} .$$

Il est immédiat que $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{G} \ , \ \sigma_*(A) = A\}$. Il en résulte que $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$, où $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{G} \ , \ \sigma_*(A) = -A\}$. On a

$$\mathcal{P} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{q_1} & -\overline{q_2} & \dots & -\overline{q_m} \\ q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \ , \ x = (q_i) \in \mathbb{H}^m \right\} .$$

Si on munit $\mathcal{P}$ du produit scalaire:

$$-\frac{1}{8(m+2)}\, B|_{\mathcal{P}},$$

où $B|_{\mathcal{P}}$ désigne la restriction à $\mathcal{P}$ de la forme de Killing de $\mathcal{G}$, alors l'application $A(x) \longrightarrow x$ est une isométrie de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}^{4m}$. Cette identification permet de définir un homorphisme de groupes $\alpha : K \longrightarrow SO(4m)$, en considérant $\alpha = \mathrm{Ad}\, K|_{\mathcal{P}}$. De façon précise, on a

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)(x) = B\, x\, \overline{q}\,.$$

Classiquement, on note $Sp(1) \cdot Sp(m)$ le sous-groupe $\alpha(K)$. Le noyau de α étant isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, on a

$$Sp(1) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(m) \simeq Sp(1) \cdot Sp(m)\,. \tag{1.1}$$

1.2. Représentations irréductibles du groupe $K = Sp(1) \times Sp(m)$

Dans la suite, $(e_0, e_{\overline{0}}, e_1, e_{\overline{1}}, \ldots, e_m, e_{\overline{m}})$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^{2(m+1)}$ vérifiant les relations: $\omega(e_i, e_j) = \omega(e_{\overline{i}}, e_{\overline{j}}) = 0$, $\omega(e_i, e_{\overline{j}}) = \delta_{ij}$, où ω désigne la forme symplectique sur $\mathbb{C}^{2(m+1)}$, induite par l'identification $\mathbb{H}^{m+1} \simeq \mathbb{C}^{2(m+1)}$.

On considère le tore maximal T de K défini par

$$T = \left\{\text{mat. diag.}\,(e^{i x_0}, e^{i x_1}, \ldots, e^{i x_m})\ ,\ x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

(Les x_j sont aussi considérés comme des formes sur l'algèbre de Lie $\mathcal{T}$ de T.)

Un poids $\nu \in (\mathcal{T}_{\mathbb{C}})^*$ est noté $\nu = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$ si

$$\nu\Big(\text{mat. diag.}\,(e^{i x_0}, e^{i x_1}, \ldots, e^{i x_m})\Big) = i\,(l_0 x_0 + \ldots l_m x_m)\,.$$

On choisit une chambre de Weyl pour K de telle sorte que les racines simples soient

$$\beta_0 = 2i\,x_0\,, \qquad \beta_j = i\,(x_j - x_{j+1})\,, \quad 1 \le j \le m\,.$$

Comme K est simplement connexe, tout poids dominant correspond à une représentation irréductible, et inversement.

Un poids $\nu = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$ de K est dominant si et seulement si

$$l_j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, m\}\,, \quad \text{et} \quad l_0 \ge 0\,,\ l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_m \ge 0\,. \tag{1.2}$$

Le K-module associé au poids dominant $\nu = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$ est un sous-espace de

$$W = W_0^{l_0} \otimes W_1^{l_1 - l_2} \otimes W_2^{l_2 - l_3} \otimes \cdots \otimes W_m^{l_m}\,, \tag{1.3}$$

avec les notations suivantes:
- W_0 est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $(e_0, e_{\overline{0}})$,
- W_k le sous-espace de $\wedge^k(\mathbb{C}^{2m})$ engendré par les k-vecteurs décomposables correspondant aux sous-espaces totalement isotropes de $\mathbb{C}^{2m}$ de dimension k,
- $W_k^{l_k - l_{k+1}}$ le produit tensoriel symétrisé de $(l_k - l_{k+1})$ exemplaires de W_k, (cf. [Ad], et [Bour] ou [Di], pour la caractérisation des représentations irréductibles du groupe symplectique).

1.3. Décomposition de la représentation spinorielle $\rho : Spin(4m) \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, sous l'action de $K = Sp(1) \times Sp(m)$

Nous donnons une démonstration élémentaire (cf. [Mil]) de ce résultat donné dans [Ba-Sal] et [Wg] (cf. également [Sal 2]).

Le groupe K étant simplement connexe, l'homorphisme α défini au §1.1, se relève en un homomorphisme $\widetilde{\alpha} : K \to Spin(4m)$, tel que $\varphi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$, où φ désigne le revêtement $Spin(4m) \to SO(4m)$.

L'algèbre de Clifford complexe Cl_{4m} admet, à équivalence près, une seule représentation irréductible. Soit $\rho : \mathrm{Cl}_{4m} \to Hom_{\mathbb{C}}(\Sigma, \Sigma)$ une telle représentation. On désigne également par ρ la représentation spinorielle induite. Le groupe K opérant sur Σ par $\rho \circ \widetilde{\alpha}$, l'espace Σ se décompose donc en une somme de K-modules de représentations irréductibles.

On considère la représentation spinorielle suivante: Soit $\mathcal{B} = (e_k, Ie_k, Je_k, Ke_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, la base orthonormée de $\mathbb{R}^{4m}$, définie en considérant les images Ie_k, Je_k, Ke_k des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{H}^m$ par les endomorphismes associés à l'action de $i, j, k \in Sp(1)$ sur $\mathbb{H}^m$. Par l'isométrie $\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^{4m}$ définie au §1.1, $\mathcal{B}$ est l'image de la base

$$(E_{k0} - E_{0k}, -i(E_{k0} - E_{0k}), -j(E_{k0} - E_{0k}), -k(E_{k0} - E_{0k})),$$

où (E_{ij}) désigne la matrice de $M_{m+1}(\mathbb{H})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Les vecteurs

$$\begin{cases} x_k = \frac{1}{2}(e_k + i\,Ie_k), & \overline{x_k} = \frac{1}{2}(e_k - i\,Ie_k) \\ y_k = \frac{1}{2}(Je_k + i\,Ke_k), & \overline{y_k} = \frac{1}{2}(Je_k - i\,Ke_k)\ , \end{cases} \tag{1.4}$$

forment une base de Witt de $\mathbb{C}^{4m}$, on a en effet

$$\begin{aligned} &\langle x_k, x_l\rangle = \langle \overline{x_k}, \overline{x_l}\rangle = \langle y_k, y_l\rangle = \langle \overline{y_k}, \overline{y_l}\rangle = 0\ , \\ &\langle x_k, \overline{x_l}\rangle = \langle y_k, \overline{y_l}\rangle = \tfrac{1}{2}\,\delta_{kl}\ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'extension à $\mathbb{C}^{4m}$ du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{4m}$.

Soit $\Phi = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdots \overline{x_m} \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_2} \cdots \overline{y_m} \in \mathrm{Cl}_{4m}$. L'espace $\Sigma = \mathrm{Cl}_{4m} \cdot \Phi$ est de dimension 4^m, une base étant donnée par les vecteurs

$$\begin{aligned} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_p} \cdot y_{j_1} \cdot y_{j_2} \cdots y_{j_q} \cdot \Phi, \quad & 0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m, \\ & 0 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le m, \end{aligned} \tag{1.6}$$

où on pose $x_0 = \overline{x_0} = 1$.

La représentation spinorielle $\rho : \mathrm{Cl}_{4m} \to Hom_{\mathbb{C}}(\Sigma, \Sigma)$, est alors définie par

$$\rho(\varphi)\ :\ \psi \cdot \Phi \to \varphi \cdot \psi \cdot \Phi\ .$$

Soit A = mat. diag.$(i\beta_0, i\beta_1, \dots, i\beta_m)$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{T}$ du tore maximal T. On a

$$\rho_* \circ \widetilde{\alpha}_* (A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (\beta_0 - \beta_k)\, \rho(e_k \cdot Ie_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (\beta_0 + \beta_k)\, \rho(Je_k \cdot Ke_k) .$$

Soit $\varphi = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_p} \cdot y_{j_1} \cdot y_{j_2} \cdots y_{j_q} \cdot \Phi$, on vérifie facilement que

$$\begin{cases} e_k \cdot Ie_k \cdot \varphi = i\,\varphi, & \text{si } k \notin \{i_1, \dots, i_p\}, \\ e_k \cdot Ie_k \cdot \varphi = -i\,\varphi, & \text{si } k \in \{i_1, \dots, i_p\}, \\ Je_k \cdot Ke_k \cdot \varphi = i\,\varphi, & \text{si } k \notin \{j_1, \dots, j_q\}, \\ Je_k \cdot Ke_k \cdot \varphi = -i\,\varphi, & \text{si } k \in \{j_1, \dots, j_q\}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\rho_* \circ \widetilde{\alpha}_*)(A)(\varphi) = i\,[\,&(m - (p+q))\,\beta_0 \\ &+ \beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_p} - \beta_{j_1} - \cdots - \beta_{j_q}]\,\varphi .\end{aligned} \tag{1.7}$$

Sous l'action du tore maximal T, Σ se décompose donc en la somme directe des espaces $\mathbb{C}(x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_p} \cdot y_{j_1} \cdot y_{j_2} \cdots y_{j_q} \cdot \Phi)$, les poids étant de la forme $(n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_k = -1, 0$ ou 1. Du §1.2, on déduit

Proposition 1.1. *La représentation $\rho \circ \widetilde{\alpha}$ de $K = Sp(1) \times Sp(m)$ sur l'espace des spineurs se décompose en $(m+1)$ représentations irréductibles de poids dominants*

$$\nu_k = (k, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) ,$$

où on note k le nombre de zéros $(0 \le k \le m)$.

De plus, la multiplicité de chacune des représentations est 1.

Preuve. La première partie résulte de l'expression des poids dominants des représentations irréductibles de K (cf. 1.2). Pour la deuxième partie, on remarque que le K-module Σ_k correspondant à ν_k est isomorphe à un sous-espace de $W_0^k \otimes W_{m-k}$, (cf. 1.3). Or,

$$\dim(W_0^k \otimes W_{m-k}) = (k+1) \left(\binom{2m}{m-k} - \binom{2m}{m-k-2} \right)$$

(cf. [Bour]), et

$$\sum_{k=0}^{m} \dim(W_0^k \otimes W_{m-k}) = 4^m = \dim \Sigma .$$

On en déduit que

$$\Sigma_k \simeq W_0^k \otimes W_{m-k} ,$$

et que la multiplicité de la représentation correspondante est nécessairement égale à 1.

Corollaire 1.1. *L'espace des spineurs Σ se décompose en $(m+1)$ K-modules de irréductibles*

$$\Sigma = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k ,$$

avec

$$\dim \Sigma_k = (k+1) \left(\binom{2m}{m-k} - \binom{2m}{m-k-2} \right) .$$

2. Décomposition du fibré des spineurs d'une variété spin Kähler-quaternionienne en sous-fibrés "propres" pour l'action de la 4-forme fondamentale

Soit (M^{4m}, g, F) une variété Kähler-quaternionienne. Par définition, il existe une réduction à $H = Sp(1) \cdot Sp(m)$, $H(M) \to M$, du fibré des repères orthonormés directs de M^{4m}.

Si m est impair, et si la variété est munie d'une structure spin, alors le fibré $H(M)$ admet une extension $K(M) \to M$ au groupe $K = Sp(1) \times Sp(m)$ (cf. [Sal 1]). On considère la structure spinorielle définie par le fibré principal

$$K(M) \times_K Spin(4m) ,$$

où K opère à gauche sur $Spin(4m)$ par l'intermédiaire de l'homomorphisme $\widetilde{\alpha}$ défini au §1.3. En considérant la représentation spinorielle $\rho \circ \widetilde{\alpha} : K \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, définie dans le §1.3, le fibré des spineurs est alors isomorphe au fibré vectoriel

$$\Sigma M = K(M) \times_K \Sigma .$$

Il découle immédiatement du Corollaire 1.1 que si l'on pose

$$\Sigma_k M = K(M) \times_K \Sigma_k ,$$

alors le fibré des spineurs se décompose en

$$\Sigma M = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k M , \tag{2.1}$$

avec

$$\mathrm{rang}(\Sigma_k M) = (k+1) \left(\binom{2m}{m-k} - \binom{2m}{m-k-2} \right) . \tag{2.2}$$

Si m est pair, l'homorphisme $\widetilde{\alpha}$ du §1.3 se factorise en un homorphisme $\overline{\alpha} : H \to Spin(4m)$ (cf. [Ma-Ro]). On considère alors la structure spinorielle définie par le fibré principal

$$H(M) \times_H Spin(4m) ,$$

où H opère à gauche sur $Spin(4m)$ par l'intermédiaire de $\overline{\alpha}$.

Pour tout entier $k = 0, 1, \ldots, m$, la représentation

$$\widetilde{\rho} = \rho \circ \widetilde{\alpha} \, : \, K \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma_k)$$

se factorise en une représentation

$$\overline{\rho} \, : \, H \to GL_{\mathbb{C}}(\Sigma_k) \, .$$

On a en effet, d'après l'isomorphisme $\Sigma_k \simeq W_0^k \otimes W_{m-k}$ (cf. §1.3),

$$\widetilde{\rho}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right) = (-1)^m \, \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \, .$$

On peut donc considérer les fibrés vectoriels

$$\Sigma_k M = H(M) \times_H \Sigma_k \, ,$$

où H opère sur Σ_k par la représentation $\overline{\rho}$. Le fibré des spineurs est alors isomorphe à

$$\Sigma M = \bigoplus_{k=0}^{m} \Sigma_k M \, , \tag{2.3}$$

les fibrés $\Sigma_k M$ ayant même rang que ceux définis en (2.1).

Par multiplication de Clifford, on peut faire opérer la 4-forme fondamentale Ω de (M^{4m}, g, F) (cf. 0.4) sur le fibré des spineurs ΣM.

Proposition 2.1. *La restriction de la 4-forme Ω à $\Sigma_k M$ est un multiple de l'identité.*

Preuve. Par définition, l'action de la 4-forme Ω sur un spineur ψ_x de la fibre de ΣM en $x \in M^{4m}$ est donnée par

$$\Omega_x \cdot \psi_x = \mathcal{S}_x\big(\rho(\boldsymbol{\Omega}) \circ (\mathcal{S}_x)^{-1}(\psi_x)\big) \, , \tag{2.4}$$

où

(i) ρ est la représentation $\mathrm{Cl}_{4m} \to Hom_{\mathbb{C}}(\Sigma, \Sigma)$, définie au §1.3,
(ii) $\mathcal{S}_x$ est un repère spinoriel "au-dessus" d'un repère adapté $\mathcal{R}_x$ de M en x,
(iii) $\boldsymbol{\Omega} \in \wedge(\mathbb{R}^{4m}) \simeq \mathrm{Cl}(4m)$ est l'image de Ω par $\wedge^4(\mathcal{R}_x)^{-1}$.

Lemme 2.2. *Les actions respectives de $K = Sp(1) \times Sp(m)$ et de $\boldsymbol{\Omega}$ sur Σ commutent.*

Preuve du lemme. L'action d'un élément k de K sur Σ est donnée par $\rho \circ \widetilde{\alpha}(k)$. Celle de $\boldsymbol{\Omega}$ est définie par $\rho(\boldsymbol{\Omega})$. Il suffit donc de vérifier que $\widetilde{\alpha}(k)$ et $\boldsymbol{\Omega}$ commutent dans Cl_{4m}. On a

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \widetilde{\alpha}(k) = \widetilde{\alpha}(k) \cdot (\widetilde{\alpha}(k))^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \widetilde{\alpha}(k) \, .$$

Or, $(\widetilde{\alpha}(k))^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \widetilde{\alpha}(k)$ est l'image de $\boldsymbol{\Omega}$ par l'extension naturelle de $\alpha(k) \in SO(4m)$ à Cl_{4m} (cf. [L-M]). Comme la 4-forme $\boldsymbol{\Omega}$ est invariante par $H = Sp(1) \cdot Sp(m)$, on a

$$(\widetilde{\alpha}(k))^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \widetilde{\alpha}(k) = \boldsymbol{\Omega} \, ,$$

Donc

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \widetilde{\alpha}(k) = \widetilde{\alpha}(k) \cdot \boldsymbol{\Omega} .$$

D'où le résultat. □

Puisque $\boldsymbol{\Omega}$ commute avec l'action de K sur Σ, il résulte du Théorème de Schur que la restriction de $\boldsymbol{\Omega}$ à Σ_k est un multiple de l'identité, $\mu_k \,\mathrm{Id}$. D'après (2.4), on a donc

$$\Omega|_{\Sigma_k M} = \mu_k \,\mathrm{Id} . \tag{2.5}$$

□

Il reste donc à calculer μ_k. D'après (2.4), on peut se ramener à un calcul dans la fibre-type Σ_k. Pour tout $\varphi \in \Sigma_k$, on a

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \varphi = \mu_k \varphi .$$

On reprend les notations du §1.3. D'après (1.7), on remarque que

$$\varphi = x_1 \cdot x_2 \cdots x_{m-k} \cdot \Phi ,$$

vecteur dominant de la représentation considérée pour le poids ν_k, appartient à Σ_k.

Exprimons $\boldsymbol{\Omega}$ dans la base de Cl_{4m}, définie par la base $(x_k, \overline{x_k}, y_k, \overline{y_k})$ de $\mathbb{C}^{4m}$, introduite au §1.3. D'après (0.4), (0.5), on a

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{p.c.\, I,J,K} \boldsymbol{\Omega}_I \wedge \boldsymbol{\Omega}_I ,$$

où

$$\boldsymbol{\Omega}_I = \sum_{i=1}^{m} e_i \wedge Ie_i + Je_i \wedge Ke_i = \frac{1}{2} \sum_{i}^{4m} \epsilon_i \wedge I\epsilon_i ,$$

avec $\epsilon_{4k-3} = e_k$, $\epsilon_{4k-2} = Ie_k$, $\epsilon_{4k-1} = Je_k$, $\epsilon_{4k} = Ke_k$.

D'où l'expression de $\boldsymbol{\Omega}$ dans Cl_{4m}:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} &= \frac{1}{4} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{\substack{j \neq i \\ \epsilon_j \neq \pm I\epsilon_i}} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot I\epsilon_j \\
&= \frac{1}{4} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot I\epsilon_j - \frac{1}{4} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{\substack{j = i \\ \epsilon_j \pm I\epsilon_i}} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot I\epsilon_j \\
&= \frac{1}{4} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot I\epsilon_j + \frac{1}{2} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{i} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \\
&= \frac{1}{4} \sum_{p.c.\, I,J,K} \sum_{i,j} \epsilon_i \cdot I\epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot I\epsilon_j + 6m \\
&= \sum_{p.c.\, I,J,K} \boldsymbol{\Omega}_I \cdot \boldsymbol{\Omega}_I - 6m .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme

$$\begin{cases} e_j = x_j + \overline{x_j}, & Ie_j = -i\,(x_j - \overline{x_j}) \\ Je_j = y_j + \overline{y_j}, & Ke_j = -i\,(y_j - \overline{y_j})\ , \end{cases}$$

on obtient d'après les relations (1.5)

$$\boldsymbol{\Omega}_I = 2i\sum_{r=1}^{m}(1 + x_r \cdot \overline{x_r} + y_r \cdot \overline{y_r})\ .$$

D'où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_I \cdot \boldsymbol{\Omega}_I = -4\sum_{r,s=1}^{m}(&1 + x_r \cdot \overline{x_r} + y_r \cdot \overline{y_r} + x_s \cdot \overline{x_s} + y_s \cdot \overline{y_s} \\ &+ x_r \cdot \overline{x_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} + x_r \cdot \overline{x_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} + y_r \cdot \overline{y_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} + y_r \cdot \overline{y_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s})\ .\end{aligned}$$

Comme $y_r \cdot \overline{y_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} = x_s \cdot \overline{x_s} \cdot y_r \cdot \overline{y_r}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_I \cdot \boldsymbol{\Omega}_I = -4\Big(m^2 &+ 2m\sum_r x_r \cdot \overline{x_r} + 2m\sum_r y_r \cdot \overline{y_r} + \sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} \\ &+ \sum_{r,s} y_r \cdot \overline{y_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} + 2\sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s}\Big)\ .\end{aligned} \tag{2.7}$$

Des calculs analogues conduisent à

$$\boldsymbol{\Omega}_J = 2\sum_{r=1}^{m}(x_r \cdot y_r + \overline{x_r} \cdot \overline{y_r})\ .$$

D'où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_J \cdot \boldsymbol{\Omega}_J = 4\sum_{r,s=1}^{m}(&x_r \cdot y_r \cdot x_s \cdot y_s + x_r \cdot y_r \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} \\ &+ \overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot x_s \cdot y_s + \overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s})\ .\end{aligned}$$

Comme

$$\overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot x_s \cdot y_s = -\delta_{rs} - \delta_{rs}\, y_s \cdot \overline{y_r} - \delta_{rs}\, x_s \cdot \overline{x_r} + x_s \cdot y_s \cdot \overline{x_r} \cdot \overline{y_r}\ ,$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_J \cdot \boldsymbol{\Omega}_J = -4\Big(m &+ \sum_r x_r \cdot \overline{x_r} + \sum_r y_r \cdot \overline{y_r} - \sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot x_s \cdot y_s \\ &- \sum_{r,s} \overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} - 2\sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s}\Big)\ .\end{aligned} \tag{2.8}$$

Enfin, des calculs similaires conduisent à

$$\boldsymbol{\Omega}_K \cdot \boldsymbol{\Omega}_K = -4 \Big(m + \sum_r x_r \cdot \overline{x_r} + \sum_r y_r \cdot \overline{y_r} + \sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot x_s \cdot y_s + \sum_{r,s} \overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} - 2 \sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} \Big) . \tag{2.9}$$

De (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), on déduit alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} - 6m = -\Big(& 4m^2 + 8m + 8(m+1) \sum_r x_r \cdot \overline{x_r} + 8(m+1) \sum_r y_r \cdot \overline{y_r} \\ & + 4 \sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} + 4 \sum_{r,s} y_r \cdot \overline{y_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} \\ & + 8 \sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} - 16 \sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} \Big) . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Calculons $\boldsymbol{\Omega} \cdot \varphi$. On a

$$\sum_r x_r \cdot \overline{x_r} \cdot \varphi = \sum_{r=1}^{m-k} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot \varphi \ ,$$

car les autres termes de la somme sont nuls. Donc

$$\begin{aligned} \sum_r x_r \cdot \overline{x_r} \cdot \varphi &= \sum_{r=1}^{m-k} x_1 \cdots x_r \cdot \overline{x_r} \cdot x_r \cdots x_k \cdot \Phi \\ &= -\,(m-k)\,\varphi . \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_r y_r \cdot \overline{y_r} \cdot \varphi = 0 \ , \qquad \sum_r \overline{x_r} \cdot \overline{y_r} \cdot \varphi = 0 \ ,$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} &\sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot x_s \cdot \overline{x_s} = (m-k)^2 \varphi \, , \\ &\sum_{r,s} y_r \cdot \overline{y_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} \cdot \varphi = 0 \, , \\ &\sum_{r,s} x_r \cdot \overline{x_r} \cdot y_s \cdot \overline{y_s} \cdot \varphi = 0 \, , \\ &\sum_{r,s} x_r \cdot y_r \cdot \overline{x_s} \cdot \overline{y_s} \cdot \varphi = 0 \, . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot \varphi &= 6m - 4\,(\, m^2 + 2m - 2(m-k)(m+1) + (m-k)^2 \,)\, \varphi \\ &= 6m - 4\,k(k+2) \ . \end{aligned}$$

□

Références

[Ad] J.F. Adams, *Lectures on Lie groups* (Benjamin, New York, 1969).

[Ba-Sal] R. Barker and S.M. Salamon, Analysis on a generalized Heisenberg group, J. London Math. Soc. 28 (1983) 184–192.

[Ber] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France 83 (1955) 279–330.

[Bes] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Springer, 1987).

[Bon] E. Bonan, Sur les G-structures de type quaternionien, Cahiers Top. Geom. Diff. 9 (1967) 389–461.

[Bour] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques, Groupes et Algèbres de Lie*, Chs. VII & VIII (Hermann, Paris, 1975).

[Di] J. Dieudonné, *Eléments D'Analyse*, Tome 5, Cahiers Sci. 38 (Gauthier-Villars, Paris, 1975).

[H-M] O. Hijazi and J.L. Milhorat, Minoration des valeurs propres de l' opérateur de Dirac sur les variétés spin Kähler-quaternioniennes, J. Math. Pures Appl., à paraître.

[Is] S. Ishihara, Quaternionic Kählerian manifolds, J. Differential Geom. 4 (1974) 483–500.

[Kr] V.Y. Kraines, Topology of quaternionic manifolds, Trans. American Mathematical Society 122 (1966) 357–367.

[L-M] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, *Spin Geometry* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989).

[Ma-Ro] S. Marchiafava and G. Romani, Sui fibrati con struttura quaternioniale generalizzata, Ann. Mat. Pura Appl. 107 (1976) 131–157.

[Mil] J.L. Milhorat, Spectre de l'opérateur de Dirac sur les espaces projectifs quaternioniens, C.R. Acad. Sci. Paris 314 (1992) 69–72.

[Sal 1] S. Salamon, Quaternionic Kähler manifolds, Inventiones Math. 67 (1982) 143–171.

[Sal 2] S. Salamon, The Dirac operator and quaternionic Kähler manifolds, in: *Proc. International Conference on Differential Geometry and its Applications (Opava, 1992).*

[Wg] M.Y. Wang, Parallel spinors and parallel forms, Anal. Global. Anal. Geom. 7 (1989) 59–68.